12.7 Tensoralgebra, symmetrische, äussere Algebra

Proposition: Für alle $r, s \geqslant 0$ existieren eindeutige bilineare Abbildungen

$$\begin{aligned}
\otimes\colon\ & V^{\otimes r} \times V^{\otimes s} \to V^{\otimes(r+s)} && \text{mit}\ (v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) \otimes (v_{r+1} \otimes \ldots \otimes v_{r+s}) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_{r+s},\\
\cdot\colon\ & S^rV \times S^sV \to S^{r+s}V && \text{mit}\ (v_1 \cdots v_r) \cdot (v_{r+1} \cdots v_{r+s}) = v_1 \cdots v_{r+s},\\
\wedge\colon\ & \Lambda^rV \times \Lambda^sV \to \Lambda^{r+s}V && \text{mit}\ (v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) \wedge (v_{r+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s}) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r+s}.
\end{aligned}$$

Bew.:

$$\begin{tikzcd}
V^r \times V^s = V^{r+s} \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^{r+s}V \\
V^r \times \Lambda^s V \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] \arrow[d] & \\
\Lambda^r V \times \Lambda^s V \arrow[uur, dashed, "\exists!\ \text{bilinear}"'] &
\end{tikzcd}$$

multilinear alternierend in $v_1, \ldots$

$$(v_1, \ldots, v_{r+s}) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r+s}$$

$$((v_1, \ldots, v_r), v_{r+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s})$$

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r, v_{r+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s})$$

Für $v_1, \ldots, v_r$ fest:

$$\begin{tikzcd}
V^s \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^{r+s}V \\
\Lambda^s V \arrow[ur, dashed, "\exists!\ \text{linear}"'] &
\end{tikzcd}$$

$v_{r+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s} \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r+s}$

Für $\xi \in \Lambda^s V$ fest:

$$\begin{tikzcd}
V^r \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^{r+s} \\
\Lambda^r V \arrow[ur, dashed, "\exists!\ \text{lineare Abb.}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\xi' \in \Lambda^s V$

qed.

Rest analog.

Definition: (Für die äussere direkte Summe $\boxplus$ siehe §5.4.)

Tensoralgebra	$TV := \boxplus_{r \geqslant 0} V^{\otimes r}$	$(\xi_r)_{r\geqslant 0} \otimes (\eta_s)_{s \geqslant 0} := \left(\sum_{r=0}^t \xi_r \otimes \eta_{t-r}\right)_{t \geqslant 0}$
symmetrische Algebra	$SV := \boxplus_{r \geqslant 0} S^rV$	$(\xi_r)_{r\geqslant 0} \cdot (\eta_s)_{s \geqslant 0} := \left(\sum_{r=0}^t \xi_r \cdot \eta_{t-r}\right)_{t \geqslant 0}$
äussere Algebra	$\Lambda V := \boxplus_{r \geqslant 0} \Lambda^rV$	$(\xi_r)_{r\geqslant 0} \wedge (\eta_s)_{s \geqslant 0} := \left(\sum_{r=0}^t \xi_r \wedge \eta_{t-r}\right)_{t \geqslant 0}$

$(1, 0, \ldots)$, $\xi_0 = 1$, $\forall r > 0: \xi_r = 0$

$(\xi_0 \wedge \eta_t)_{t \geq 0} = (\eta_t)_{t \geq 0}$

Proposition: Mit der Addition des unterliegenden Vektorraums und der angegebenen Multiplikation sowie dem Einselement von $K = V^{\otimes 0} = S^0 V = \Lambda^0 V$ ist dies jeweils ein assoziativer unitärer graduierter Ring.

1 $\in$

$(1, 0, 0, \ldots) \in \bigoplus \ldots$

Die in dem jeweiligen Ring geltenden Rechenregeln ergeben sich aus denen in §12.3 und §12.6 sowie der obigen Definition.

Das heißt: Assoziativität der Multiplikation.

Beidseitige Distributivität $\Longleftarrow$ Bilinearität von der .

Einselement .

$$\begin{tikzcd}
 & & V^{r+s} \times V^t \arrow[d] & \\
V^r \times V^s \times V^t \arrow[r] \arrow[d] \arrow[urr, bend left] & \Lambda^r V \times \Lambda^s V \times \Lambda^t V \arrow[r, "\wedge \times id"] \arrow[d, "id \times \wedge"] & \Lambda^{r+s} V \times \Lambda^t V \arrow[d, "\wedge"] \\
V^r \times V^{s+t} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \Lambda^r V \times \Lambda^{s+t} V \arrow[r, "\wedge"] & \Lambda^{r+s+t} V
\end{tikzcd}$$

Rest analog.

Also: Die $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ erzeugen $\Lambda^r V$
$\xi_1 :=$

$v_{r+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s}$ " $\Lambda^s V$
$\xi_2 :=$

$v_{r+s+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s+t}$ " $\Lambda^t V$
$\xi_3 :=$

Für diese gilt $(\xi_1 \wedge \xi_2) \wedge \xi_3 = \xi_1 \wedge (\xi_2 \wedge \xi_3)$

Linearkombination $\Rightarrow$ gilt für alle $\xi_1 \in \Lambda^r V$, $\xi_2 \in \Lambda^s V$, $\xi_3 \in \Lambda^t V$.

qed.

Bsp.: T^rV im Allgemeinen nicht kommutativ. v_1, v_2 lin. unabh.

$$v_1 \otimes v_2 \neq v_2 \otimes v_1$$

Bsp.: SV ist kommutativ. $V^{r+s} \longrightarrow S^{r+s}V$

denn: $(v_1 \cdots v_r)(v_{r+1} \cdots v_{r+s}) = (v_{r+1} \cdots v_{r+s}) \cdot (v_1 \cdots v_r)$.

Diese erzeugen S^rV, S^sV; linearkombinieren $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\forall \xi \in S^rV \\ \forall \eta \in S^sV\end{array}\right\}$: $\xi\eta = \eta\xi$.

Bsp.: ΛV im Allgemeinen nicht kommutativ. v_1, v_2 lin. abh.

$$\underline{0 \neq v_2 \wedge v_1 = -v_1 \wedge v_2 \neq v_1 \wedge v_2} \quad \text{falls } 2 \neq 0 \text{ in } K.$$

ΛV kommutativ falls $2 = 0$ in K.

Bsp.: Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh. $\Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_n \neq 0$.

Sei $v_1 + \dots + v_n = 0$ aber je $n-1$ dann lin. unabh.

$$\Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_n = v_1 \wedge \dots \wedge \left(-\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right) = -\sum_{k=1}^{n-1} (\underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge v_k}_{=0 \text{ da } v_k \text{ zweimal auftritt}}) = 0.$$

$$v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + \dots + v_{n-1} \wedge v_n + v_n \wedge v_1 = \sum_{k=1}^{n-2} v_k \wedge v_{k+1} + \underbrace{v_{n-1} \wedge \left(-\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right)}_{-\sum v_{n-1} \wedge v_k = \sum_{k=1}^{n-2} v_k \wedge v_{n-1}} + \underbrace{\left(-\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right) \wedge v_1}_{\sum_{k=2}^{n-1} v_1 \wedge v_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-2} v_k \wedge v_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-2} v_k \wedge v_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} v_1 \wedge v_k$$

Spezialfall: Für $\dim_K V = 0$ gilt $V^{\otimes r} = S^r V = \Lambda^r V = 0$ für alle $r > 0$, und daher $TV = SV = \Lambda V \cong K$.

Spezialfall: Sei $\dim_K V = 1$ mit Basis b. Für alle $r \geqslant 0$ gilt dann $\dim_K(V^{\otimes r}) = 1$ mit Basis $b^{\otimes r}$ und $\dim_K(S^r V) = 1$ mit Basis b^r, und es existieren eindeutige Isomorphismen

$$K[X] \xrightarrow{\sim} TV \xrightarrow{\sim} SV, \quad {\textstyle\sum'_{i\geqslant 0}} a_i X^i \mapsto {\textstyle\sum'_{i\geqslant 0}} a_i b^{\otimes i} \mapsto {\textstyle\sum'_{i\geqslant 0}} a_i b^i, \quad \text{bzw.}$$
$$K \boxplus Kb \xrightarrow{\sim} \Lambda V \quad \text{mit} \quad b \wedge b = 0.$$

Proposition: (a) Für $V \neq 0$ ist $\dim_K(TV) = \dim_K(SV) = \infty$.

(b) Für $\dim_K(V) < \infty$ ist $\dim_K(\Lambda V) = 2^{\dim_K(V)}$, andernfalls ist $\dim_K(\Lambda V) = \infty$.

Bew.: $\dim_K(V) = n \Rightarrow \dim_K(\Lambda^r V) = \binom{n}{r}$, dies ist 0 für $r > n$.

$$\Rightarrow \dim \Lambda V = \sum_{r \geqslant 0} \binom{n}{r} = 2^n.$$

q.e.d.

Bem.: Im Allgemeinen ist $\xi \wedge \xi \neq 0$, falls $\xi \in \Lambda^r V$ für gerades r.

Bsp.: $v_1, \dots, v_4 \in V$, $\xi = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$

$$\Rightarrow \xi \wedge \xi = (v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4) \wedge (v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4)$$

$$= \underbrace{v_1 \wedge v_2 \wedge v_1 \wedge v_2}_{=0} + (v_3 \wedge v_4) \wedge (v_1 \wedge v_2) + (v_1 \wedge v_2) \wedge (v_3 \wedge v_4) + \underbrace{v_3 \wedge v_4 \wedge v_3 \wedge v_4}_{=0}$$

gleich!

$$= 2 \cdot v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4 .$$

$\xi \wedge \xi$ im Allg. $\neq 0$ falls $\xi \in \Lambda^r V$, r gerade.

Proposition: Für alle $r, s \geqslant 0$ und alle $\xi \in \Lambda^r V$ und $\eta \in \Lambda^s V$ gilt

$$\eta \wedge \xi \;=\; (-1)^{rs} \cdot \xi \wedge \eta.$$

Insbesondere kommutiert für gerades r jedes Element von $\Lambda^r V$ mit ganz ΛV.

Bem.: $\Lambda^r V$ von $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ erzeugt.
$\Lambda^s V$ " $v_{r+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s}$ "
$\Rightarrow$ Genügt für $\xi = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$
$\eta = v_{r+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s}$

$(v_{r+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s}) \wedge (v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, (v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) \wedge (v_{r+1} \wedge \ldots \wedge v_{r+s})$ $\Rightarrow \eta \wedge \xi = (-1)^{rs} \cdot \xi \wedge \eta$

für $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & r+s \\ r+1 & \cdots & r+s & 1 \cdots r \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\#\text{Fehlstände}} = (-1)^{r \cdot s}$

qed.

Proposition: Ist $\dim_K(V) < \infty$, so existieren für alle $r \geqslant 0$ natürliche Isomorphismen

$$\Lambda^r(V^\vee) \xrightarrow[\sim]{\varphi_r} \mathrm{Alt}^r(V, K) \xrightarrow[\sim]{} (\Lambda^r V)^\vee.$$

Dabei ist der zweite Isomorphismus ein Spezialfall der Adjunktionsformel, und der erste ist charakterisiert durch die Formel

$$\varphi_r(\ell_1, \ldots, \ell_r)(v_1, \ldots, v_r) \;=\; \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \ell_1(v_{\sigma 1}) \cdots \ell_r(v_{\sigma r}).$$